

Оценка надежности методами кригинга и Монте Карло

1 Введение

Вероятность возникновения отказа в виде разрушения конструкций является ключевой для количественной оценки рисков и управления ими. Эта вероятность обычно оценивается в процессе анализа надежности, целью которого является оценка вероятности отказа, обозначаемой как P_f . В анализе надежности P_f может быть рассчитана следующим образом:

$$P_f = \int_{G(\mathbf{x})} \rho(\mathbf{x}) dx = \int_{\Omega} I_G(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) dx, \quad (1)$$

где \mathbf{x} – вектор случайных величин; $G(\mathbf{x})$ – функция работоспособности или предельного состояния; $\rho(\mathbf{x})$ – функция совместной плотности вероятности (PDF) из \mathbf{x} ; $I_G(\mathbf{x})$ – функция индикатора отказа: $I_G(\mathbf{x}) = 1$, когда $G(\mathbf{x}) \leq 0$, и $I_G(\mathbf{x}) = 0$, когда $G(\mathbf{x}) > 0$.

Для оценки вероятности отказа существует несколько методов. Наиболее распространенным из них является моделирование методом Монте-Карло (Rubinstein & Kroese, 2016). Он состоит из случайной выборки размера n_{MC} , для которой оценивается функция работоспособности, $G(\mathbf{x})$. Затем получают оценку вероятности отказа P_f , как отношение между $n_{G \leq 0}$, количеством выборок, дающих отрицательные или нулевые значения G , и размером выборки n_{MC} :

$$P_f = \frac{n_{G \leq 0}}{n_{MC}}. \quad (2)$$

Количество оценок n_{MC} может быть чрезвычайно важным, поскольку оно зависит от ожидаемой вероятности отказа. Действительно, для определения оценки при очень малой вероятности отказа требуется большая случайная выборка. Чтобы количественно оценить неопределенность в отношении вероятности отказа, ее коэффициент вариации рассчитывается следующим образом:

$$COV_{P_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{P_f n_{MC}}}. \quad (3)$$

Моделирование методом Монте-Карло легко реализуемо и используется в широком спектре приложений. Однако оценка вероятности отказа требует оценки функции работоспособности для всей совокупности данных. Это можно легко сделать в аналитических системах, поскольку вычислительными требованиями можно пренебречь, но это может стать невозможным при использовании сложных компьютерных кодов, таких как, например, конечно-элементные модели. Разработка моделей стала чрезвычайно трудоемким процессом, несмотря на усовершенствования компьютерных технологий.

Таким образом, необходимо использовать методы, позволяющие аппроксимировать вероятность отказа при меньшем количестве обращений к функции работоспособности. FORM и SORM два элементарных подхода используемые для этой цели (см., например, Ditlevsen & Madsen, 1996; Lemaire, 2009).

Они основаны на нахождении так называемой «предельной точки» и дают большие преимущества при очень низких вероятностях отказа, однако их нельзя применить ко всем задачам (особенно с высокими нелинейными или сложными предельными состояниями в стандартном гауссовом пространстве). С целью решения этой проблемы было предложено использовать метамоделли. Эти модели нацелены на аппроксимацию функции работоспособности стратегическим планированием экспериментов (DoE) (Farjraoui et al., 2016; Durakovic, 2017; Yu et al., 2018) с целью уменьшения времени вычислений и достаточно точного предсказания знака функции работоспособности.

Помимо этих метамоделей, интенсивно исследовалось применение кригинга. Кригинг был разработан для геостатистики в пятидесятых и шестидесятых годах Криге, а затем Мэтероном (Matheron, 1973), этот метод получил распространение в области компьютерных экспериментов в восьмидесятых годах. В нем представлены несколько, но интересных отличий от других метамоделей. Во-первых, кригинг является точным методом интерполяции, т.е. предсказание в точке, относящейся к планированию экспериментов, является точным значением функции работоспособности в рассматриваемой точке. Кроме того, благодаря своей стохастической корректности кригинг предоставляет не только прогнозируемые значения в любых точках, но и оценку локальной дисперсии прогнозов. Эта дисперсия определяет локальную неопределенность прогноза и называется дисперсией кригинга, чем выше дисперсия, тем менее достоверен прогноз. Благодаря этому различию кригинг интенсивно использовался в задачах оптимизации в девяностых годах в активных методах обучения, таких как эффективная глобальная оптимизация (EGO) (Jones et al., 1998). Активное обучение означает, что модель кригинга обновляется путем добавления новой точки в схему экспериментов, причем эта точка выбирается с учетом ожидаемого улучшения модели кригинга. В этой области EGO стало важным шагом вперед.

Предельное состояние ко всем данным в пространстве, даже в областях, где конфигурации демонстрируют очень малую плотность вероятности и оказывают незначительное влияние на вероятность отказа.

Чтобы избежать зависимость от размера выборки, Эчард и др. (Echard et al., 2011) разработали метод активного обучения, который сочетает в себе кригинг и моделирование методом Монте-Карло для разделения прогнозируемых отрицательных и положительных значений $G(\mathbf{x})$ методом Монте-Карло. Идея состоит в том, чтобы выполнить моделирование методом Монте-Карло без оценки всей совокупности $G(\mathbf{x})$. Знак в каждой точке получается благодаря прогнозам модели кригинга, основанной на нескольких оцененных точках выборки. Первый этап метода состоит в генерировании совокупности данных методом Монте-Карло. Среди этой совокупности выбирается первоначальный план экспериментов очень малого размера, и для всех точек вычисляется функция обучения. С помощью этой функции выбирается наилучший следующий момент для включения в схему экспериментов. Вероятность отказа оценивается на каждом шаге благодаря прогнозам Кригинга, полученные методом Монте-Карло. Этот метод позволяет оценить точки, близкие к предельному

состоянию, повышает точность метамоделей и, прежде всего, позволяет сосредоточиться только на точках, имеющих достаточно высокую плотность вероятности, чтобы оказать существенное влияние на вероятность отказа. Таким образом, аппроксимация предельного состояния является очень точной по методу Монте-Карло. Метод получил наименование как АК-MCS, поскольку представляет собой активный метод обучения, сочетающий кригинг и метод моделирования Монте-Карло (см., также Wang & Shafieezadeh, 2019; Lelièvre et al., 2018).

Рассмотрим применение некоторых из упомянутых методов применительно к задачам геотехники.

Пространственная изменчивость свойств грунта влияет на поведение геотехнических сооружений (несущая способность, осадка фундамента, устойчивость склона и т.д.). Несколько авторов рассмотрели влияние пространственной изменчивости свойств грунта в своих расчетных моделях (Griffiths et al., 2001; Griffiths et al., 2002). Как было показано ранее для определения вероятности разрушения P_f обычно используется классическая методология моделирования методом Монте-Карло (MCS). Известно, что этот метод очень трудоемкий. Это связано с тем, что (i) обычно используются конечно-элементные или конечно-разностные модели, которые, как правило, требуют больших временных затрат на вычисления, и (ii) требуется большое количество вызовов детерминированной модели для вычисления небольших вероятностей отказа, встречающихся на практике. Таким образом, при выполнении вероятностного анализа необходимо свести к минимуму количество обращений к детерминированной модели.

Выше было упомянуто, что для преодоления недостатков, связанные с чрезмерным количеством вызовов детерминированной модели при моделировании методом Монте-Карло, Эчард и др. (Echard et al., 2011) предложили метод надежности активного обучения (называемый АК-MCS), сочетающий моделирование методом кригинга и методом Монте-Карло (рис. 1). Было отмечено, что метод АК-MCS очень эффективен, поскольку полученная вероятность отказа очень точна и требует лишь небольшого числа обращений к детерминированной модели. Вероятностный анализ, представленный ниже, был проведен с использованием методологии АК-MCS предложенной в работе Эчард и др. (Echard et al., 2011). Целью является вычисление вероятности P_f превышения предельной несущей способности основания при заданной нагрузке на основание. Силы сцепления грунта и угол внутреннего трения рассматриваются как два неизотропных негауссовских случайных поля. Они характеризуются двумя заданными функциями предельного распределения и общей автокорреляционной функцией. Детерминированная модель основана на численном моделировании с использованием технологии ТИМГео.

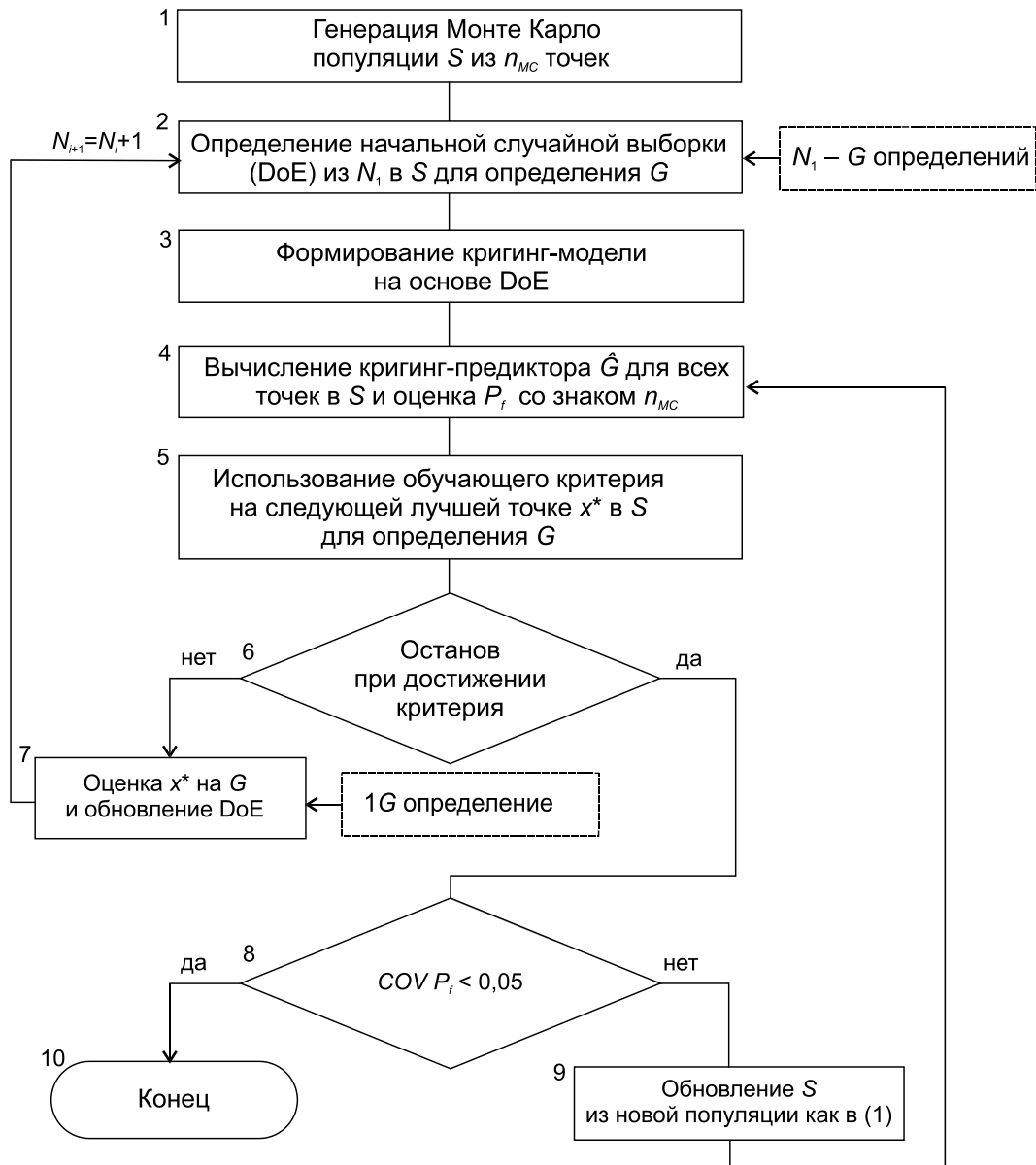


Рис. 1. Блок-схема АК-MRS (Echard et al., 2011)

2 Вероятностные модели

Ниже рассмотрено влияние пространственной изменчивости грунта на несущую способность основания центрально нагруженного фундамента. Следует помнить, что реакция системы зависит от несущей способности P_u ленточного фундамента, опирающегося на изменяющийся в пространстве грунт. Сцепление c грунта и угол внутреннего трения φ были смоделированы как два неизотропных негауссовских случайных поля. Метод дискретизации случайных полей EOLE (Expansion Optimal Linear Estimation, см., например, (Schobi & Sudret, 2015)) был использован для генерации двух случайных полей (т.е. для получения реализаций сил сцепления грунта c и угла внутреннего трения φ). Функция работоспособности, используемая для расчета вероятности P_f отказа

в виде превышения предельной несущей способности, была определена следующим образом (Thajeel et al., 2016):

$$G = \frac{P_u}{P_s} - 1, \quad (4)$$

где P_s – заданная нагрузка на основание.

В качестве вероятностного метода оценки вероятности отказа использован метод активного обучения, сочетающий кригинг и моделирование методом Монте-Карло (МК-MCS). Этот метод объединяет классический метод Монте-Карло (MCS) и метамоделирование Кригинга.

Ниже представлен метод дискретизации случайных полей EOLE. Далее следует краткое изложение метода Монте-Карло, метод метамоделирования Кригинга и комбинированное использование кригинга и моделирования методом Монте-Карло (т.е. методология МК-MCS), используемые для вероятностного анализа (Thajeel et al., 2016).

2.1 Способ генерации анизотропных негауссовых случайных полей

Рассмотрим два анизотропных негауссовых случайных поля $Z_i^{NG}(x, y) (i=c, \phi)$, описанные: (1) постоянным средним и стандартным отклонением $\mu_i \sigma_i; i=c, \phi$, (2) негауссовой предельной кумулятивной функцией распределения $G_i (i=c, \phi)$ и (3) общей квадратичной показательной функцией автокорреляции в $\rho_Z^{LN} [(x, y)(x', y')]$, которая дает значения корреляции между двумя произвольными точками (x, y) и (x', y') . Эта автокорреляционная функция задается следующим образом:

$$\rho_Z^{LN} [(x, y)(x', y')] = \exp \left(- \left(\frac{|x - x'|}{a_x} \right) - \left(\frac{|y - y'|}{a_y} \right) \right) \quad (5)$$

где a_x и a_y – расстояния вдоль x и y соответственно.

Расширенный метод оптимальной линейной оценки (EOLE) для случая негауссовых случайных полей используются здесь для генерации двух случайных полей c и ϕ . EOLE был впервые предложен в (Li & Der Kiureghian, 1993) для случая некоррелированных гауссовых полей, а затем расширен Воречовски (Vorechovsky, 2008), чтобы охватить случай коррелированных и некоррелированных негауссовых полей. В этом методе сначала следует определить стохастическую сетку, состоящую из q точек сетки (или узлов) $\{(x_1, y_1), \dots, (x_q, y_q)\}$, для которого значения поля собраны в вектор $\chi = \{Z(x_1, y_1), \dots, Z(x_q, y_q)\}$. Количество точек внутри стохастической сетки определяется таким образом, что в каждом направлении (x или y) в пределах каждого расстояния автокоррекции имеется по пять точек сетки. Во-вторых, следует определить корреляционную матрицу, для которой каждый элемент $(\Sigma_{\chi:\chi})_{i,j}^{NG}$ рассчитывается следующим образом:

$$\left(\Sigma_{\chi;\chi}\right)_{i,j}^{NG} = \rho_Z^{NG} \left[(x_i, y_i), (x_j, y_j) \right]. \quad (6)$$

Общая негауссова автокорреляционная матрица $\Sigma_{\chi;\chi}^{NG}$ должна быть преобразована в гауссово пространство с использованием метода предложенного Натаф (Nataf, 1962; Lebrun & Dutfoy, 2009), поскольку дискретизация случайных полей с использованием EOLE выполняется в гауссовом пространстве. В результате получают две гауссовы автокорреляционные матрицы: $\Sigma_{\chi;\chi}^c$ и $\Sigma_{\chi;\chi}^\phi$, которые могут быть использованы для дискретизации двух случайных полей следующим образом:

$$\tilde{Z}_i(x, y) = \mu_i + \sigma_i \sum_{j=1}^N \frac{\xi_{i,j}}{\sqrt{\lambda_j^i}} \Phi_j^i \Sigma_{Z(x,y);\chi}^i, \quad i=c, \phi, \quad (7)$$

Где $\xi_{i,j}; i=c, \phi$ – два некоррелированных блока независимых стандартных нормальных случайных величин; $\lambda_j^i, \Phi_j^i; i=c, \phi$ – собственные значения и собственные векторы двух гауссовых матриц автокорреляции $\Sigma_{\chi;\chi}^c$ и $\Sigma_{\chi;\chi}^\phi$, соответственно; $\Sigma_{Z(x,y);\chi}$ – вектор корреляции между случайным вектором χ и значением поля в произвольной точке (x, y) . Как только будут получены два гауссовских случайных поля, их следует преобразовать в негауссово пространство, применив следующую формулу:

$$\tilde{Z}_i^{NG}(x, y) = G_i^{-1} \left\{ \Phi \left[\tilde{Z}_i(x, y) \right] \right\}, \quad i=c, \phi, \quad (8)$$

где $\Phi(\cdot)$ – стандартная нормальная функция кумулятивной плотности.

2.2 Метод Монте-Карло

Моделирование методом Монте-Карло заключается в генерации N выборок, которые соответствуют совместной функции плотности вероятности $f_{\chi}(\mathbf{X})$ M случайных величин (X_1, \dots, X_M) , собранных в вектор \mathbf{X} . Для каждой выборки вычисляется отклик системы. Таким образом, для N выборок получается N значений отклика системы, собранных в вектор $\mathbf{G} = [G(\mathbf{x}_1), G(\mathbf{x}_2), \dots, G(\mathbf{x}_N)]$, который может быть использован для определения вероятности отказа при заданном пороговом значении реакции системы. Для получения точного значения вероятности отказа требуется очень большое количество реализаций, особенно при вычислении малых вероятностей отказа. Здесь следует отметить, что рассматриваемые случайные величины, являются стандартными нормальными переменными $\xi_i (j=1, \dots, N)$, которые входят в уравнение (7) для вычисления заданной реализации случайных полей сил сцепления и угла внутреннего трения.

2.3 Метод метамоделирования Кригинга

Метод метамоделирования направлен на замену отклика (или функции работоспособности) дорогостоящей в вычислительном отношении механической модели с помощью метамодел (т.е. простого аналитического уравнения). Метод метамоделирования кригинга основан на идее, что функция работоспособности $G(\mathbf{x})$ рассматривается как реализация стохастического поля $\hat{G}(\mathbf{x})$. Метамоделирование кригинга требует наличия экспериментальной выборки, длиной N , чтобы определить стохастические параметры этого поля, и затем можно получить предсказания отклика в любой неизвестной точке. Представим экспериментальные данные (проект) с помощью вектора $\mathbf{X}=[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]$, с \mathbf{x}_i i -го эксперимента, и соответствующий вектор отклика в виде $\mathbf{G}=[G(\mathbf{x}_1), G(\mathbf{x}_2), \dots, G(\mathbf{x}_N)]$. Аппроксимацию зависимости между любым экспериментом \mathbf{x} и откликом $G(\mathbf{x})$ имеет следующий вид:

$$\hat{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{Z}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$ – детерминированная часть, которая дает аппроксимацию среднего значения функции работоспособности. Это соответствует регрессионной модели, которая может быть записана в виде:

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = f^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}^T, \quad (10)$$

Где $\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_1, \dots, \beta_p]$ – вектор коэффициентов, подлежащих определению; $f^T(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})]^T$ – набор регрессионных функций. Предполагается, что число p функций регрессии меньше или равно числу наблюдений, чтобы задача не была недоопределена (т.е. в ней не было недостатка в уравнениях для вычисления неизвестных). Обычно для этого выбирают обычный кригинг, что означает, что $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$ является скаляром, подлежащим определению [т.е. $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta$]. Таким образом, оценка $\hat{G}(\mathbf{x})$ может быть упрощена следующим образом:

$$\hat{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \beta + \mathbf{Z}(\mathbf{x}); \quad (11)$$

здесь $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ представляет собой флуктуацию вокруг среднего значения. Она задается гауссовским случайным процессом (или случайным полем) с нулевым средним значением и ковариацией, определяемой уравнением:

$$COV[Z(x_i), Z(x_j)] = \sigma_z^2 R(x_i, x_j), \quad (12)$$

где σ_z^2 – дисперсия; x_i, x_j – две точки из всей выборки X , а $R(x_i, x_j)$ – корреляционная функция между этими двумя точками с вектором параметров корреляции θ . Существует несколько моделей для определения корреляционной функции R . Например, анизотропная квадратично-экспоненциальная функция:

$$R(x_i, x_j) = \prod_{i=1}^N e^{\left(-\theta_i(x_i-x_j)^2\right)}, \quad (13)$$

где N – число случайных величин, x_i и x_j – i -е координаты точек \mathbf{x}_i и \mathbf{x}_j , а θ_i – скаляр, который равен величине, обратной длине корреляции в i -м направлении.

Как видно из уравнения (11), метамодель кригинга состоит из модели линейной регрессии $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$ и стохастического процесса $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$.

Поскольку это квадратная матрица размерности $N \times N$, т.е. $\mathbf{R} = \left[R(x_i, x_j) \right]_{N \times N}$, а \mathbf{F} – единичный вектор размерности N , то $\boldsymbol{\beta}$ и σ_Z^2 могут быть определены как

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}; \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{1}{N} (\mathbf{G} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{F})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{G} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}). \quad (15)$$

Параметр корреляции θ может быть получен с помощью оценки максимального правдоподобия

$$\theta = \arg_{\theta} \min (N \ln \sigma_Z^2 + \ln |\mathbf{R}|). \quad (16)$$

Как только параметры $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\sigma}_Z^2$ и θ определены, выбирается наилучший линейный несмещенный предиктор отклика $\hat{G}(\mathbf{x})$ в неизвестной точке x , которая является гауссовой случайной величиной $\hat{G}(x) \sim N(\mu_{\hat{G}(x)}, \sigma_{\hat{G}(x)}^2)$,

где

$$\mu_{\hat{G}(x)} = \boldsymbol{\beta} + r(x) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{G} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}); \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{G}(x)}^2 = \hat{\sigma}_Z^2(x) \left(1 + \mathbf{u}^T(x) (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{u}^T(x) - \mathbf{r}^T(x) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(x) \right), \quad (18)$$

где $\mathbf{r}(x) = [R(x, x_1), R(x, x_2), \dots, R(x, x_N)]$, $\mathbf{u}(x) = \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(x) - 1$ – вектор корреляционного расстояния.

Обычно $\mu_{\hat{G}(x)}$ берется как оценка $\hat{G}(\mathbf{x})$ в точке x . Вычисление $\mu_{\hat{G}(x)}$ и $\hat{\sigma}_{\hat{G}(x)}^2$ может быть выполнено с помощью MATLAB toolbox DACE (Lophaven et al., 2002; Kaumaz, 2005; Marrel et al., 2008; Kleijnen, 2009; Dellino et al., 2009). Заметим, что дисперсия $\hat{\sigma}_{\hat{G}(x)}^2$ определяется как минимум среднеквадратичной ошибки между $\hat{G}(\mathbf{x})$ и $G(\mathbf{x})$. Отклонения точек в исходном эксперименте равны нулю, но отклонения других точек всегда не равны нулю. Большое значение $\hat{\sigma}_{\hat{G}(x)}^2$ означает, что предсказание не является точным. Следовательно, прогнозирование дисперсии $\hat{\sigma}_{\hat{G}(x)}^2$ имеет важное значение в неисследованных

областях и представляет собой хороший показатель для улучшения начального DoE.

2.4 Методология АК-MCS

На первом этапе моделирования необходимо сгенерировать значительное количество реализаций (около 1 миллиона) пространственно изменяющейся грунтовой среды с использованием линейной оценки оптимального расширения или иного метода генерации случайных полей (например, методом разложения Холецкого, см., Wang, 2022; Tang et al., 2020). Ниже, отклик большинства из этих реализаций не вычисляется на основе исходной детерминированной модели; только несколько реализаций будут вычислены с использованием этой модели в зависимости от соответствующих им значений функции обучения. На втором этапе используется первоначальная небольшая выборка данных экспериментов, путем случайного выбора некоторых реализаций среди определенной популяции методом MCS и которая была использована для вычисления модели кригинга (на основе значений откликов, полученных с использованием исходной детерминированной модели). На третьем этапе принятая функция обучения U (которая использует уже полученную модель кригинга) используется для выбора наилучшей следующей реализации (среди всех реализаций MCS), которая будет использоваться для вычисления отклика системы на основе исходной детерминированной модели. Эта одна из реализаций с минимальным значением обучающей функции U . На заключительном этапе (этап 4) отклик, полученный в результате этой реализации, используется для обновления модели кригинга этим новым значением отклика (только в том случае, если принятое условие остановки не было достигнуто). Этапы 3-4 следует повторить несколько раз до достижения принятого состояния остановки. В итоге, суррогатная модель кригинга считается достаточно точной для оценки вероятности отказа и соответствующего значения коэффициента вариации при заданном количестве реализаций. Если окажется, что коэффициент вариации вероятности отказа слишком высок, начальная MCS популяция должна быть увеличена. Более полная пошаговая процедура, описывающая применение методологии АК-MCS для вычисления вероятности отказа, может быть представлена следующим образом (Thajeel et al., 2016):

1. Сгенерируйте совокупность S с n_{MC} (скажем, 1 000 000) реализаций пространственно изменяющихся параметров грунта c и ϕ с помощью моделирования методом Монте-Карло. Вычисление функции работоспособности для этих реализаций (как определено в уравнение (4), с использованием МКЭ программы, на данном этапе не требуется).

2. Случайным образом выберите из совокупности S небольшое количество реализаций (называемых начальными проектными значениями экспериментов, DoE), содержащих N_1 реализаций (скажем, 20). Для этих N_1 реализаций следует оценить функцию работоспособности, заданную уравнением (4), из какой-либо МКЭ программы. Требуемое начальное значение DoE может превышать 20 для большого числа случайных величин (т.е. для

пространственно изменяющегося свойства грунта с малыми значениями расстояний автокорреляции). Это связано с тем, что для задач высокой размерности (т.е. когда для дискретизации случайных полей c и φ требуется большое количество случайных величин) модели кригинга требуется больше точек (т.е. реализаций) для вычисления параметров корреляции θ_i , заданных уравнением (4).

3. Определите модель кригинга используя небольшое начальное значение DoE, содержащим N_1 реализаций. Эта модель кригинга задается уравнением (11). Здесь следует отметить, что этот этап может быть выполнен с использованием Matlab toolbox DACE. В рассматриваемом случае, была использована обычная модель кригинга (т.е. регрессионная модель считается постоянной), а при анализе была использована квадратичная экспоненциальная корреляционная функция.

4. Используя DACE toolbox, вычислите (для всей популяции S , содержащая n_{MC} реализаций случайного поля) как значения предиктора кригинга функции $\mu_{\hat{G}}$ работоспособности (на основе уравнения (17)), так и соответствующие им значения дисперсии кригинга $\sigma_{\hat{G}}^2$ (на основе уравнения (18)). Исходя из полученных значений предикторов кригинга $\mu_{\hat{G}}$, получите оценку вероятности отказа \hat{P}_f путем подсчета количества отрицательных предикторов и делении его на общее количество выборки в S следующим образом:

$$\hat{P}_f = \frac{N_{\hat{G} \leq 0}}{n_{MC}}. \quad (19)$$

Коэффициент вариации \hat{P}_f определяется как:

$$COV(\hat{P}_f) = \sqrt{\frac{1 - \hat{P}_f}{\hat{P}_f n_{MC}}}. \quad (20)$$

5. Определите наилучшую следующую реализацию S , для которой будет вычислена функция работоспособности используя МКЭ программу. Это выполняется путем вычисления обучающей функции U для каждой реализации в S :

$$U(x_i) = \frac{|\mu_{\hat{G}(x_i)}|}{\sigma_{\hat{G}(x_i)}}, \quad i=1, \dots, n_{MC}. \quad (21)$$

Лучшей следующей реализацией-кандидатом является реализация с минимальным значением U . Если это минимальное значение U меньше 2, функция работоспособности, основанная на МКЭ, оценивается для этого наилучшего кандидата и обновляется исходная выборка. Таким образом, следует вернуться к шагу 3 и определить новую модель кригинга, основанную на обновленной выборке. Шаги 3, 4 и 5 повторяются до тех пор, пока минимальное

значение U не станет больше 2. На этом этапе обучение прекращается, и мета-модель считается достаточно точной на основе n_{MC} реализаций.

6. Когда обучение прекращается, необходимо вычислить оценочные значения как вероятности отказа \hat{P}_f , так и коэффициента вариации $C\hat{O}V(\hat{P}_f)$. Полученное значение \hat{P}_f считается точным, если $C\hat{O}V(\hat{P}_f) \leq 5\%$.

Если расчетный коэффициент вариации превышает 5%, необходимо увеличить популяцию S на шаг 1 и повторить процедуру. Здесь следует подчеркнуть, что в рамках рассматриваемого подхода выбрано небольшое начальное значение выборки (см. шаг 2), чтобы свести к минимуму количество обращений к детерминированной модели. Эта начальная выборка последовательно увеличивается на одну реализацию в каждый момент времени (см. шаг 5). Выбранная реализация является той, которая в наибольшей степени улучшает мета-модель, поскольку уравнение (21) ищет реализацию, которая имеет небольшой предиктор кригинга (т.е. реализацию, близкую к поверхности предельного состояния) и/или высокую дисперсию кригинга (т.е. высокую неопределенность в знаке ее значения функции работоспособности). Следует заметить, что реализации с высокой неопределенностью в знаке их значений функции работоспособности (положительные или отрицательные) – это те, которые находятся близко к поверхности предельного состояния. В то же время, критерий остановки $\min(U) > 2$ соответствует максимальной вероятности совершения ошибки по знаку функции работоспособности, равного $\Phi(-2) = 0,023$. Это означает, что критерий остановки релевантен при использовании реализаций с небольшой неопределенностью в допущении ошибки в знаках их функций работоспособности, при этом вероятность ошибки в знаках значений их функций работоспособности пренебрежимо мала.

Ли и др. (Li et al., 2023) предложили новый вид обучающей функции, основанная на U -функции. Это новый метод, который может добавлять новые обучающие точки в соответствии с требованиями, которые дополнительно учитывают взаимосвязь между обучающими точками и точками экспериментальной выборки. Функция обучения, имеет следующий вид:

$$U_A(x) = \frac{|\hat{y}(x)|}{\hat{\sigma}(x)} r_m(x)^p, \quad (22)$$

где $r_m(x)$ – максимальный коэффициент корреляции, является максимумом вектора корреляции $r(x)$ в уравнении (23); $r_m(x) \in (0, 1]$ – показатель степени $r_m(x)$ отражает важность коэффициента корреляции; он может быть любым не-отрицательным рациональным числом, такое как 0, 2, 4 и так далее.

$$r(x) = [R(x, x_1, \theta), R(x, x_2, \theta), \dots, R(x, x_n, \theta)]^T. \quad (23)$$

В частности, когда $p = 0$, уравнение (22) обращается к традиционной U -функции. Если p увеличено, то точки выборки MCS с малыми коэффициентами корреляции, которые находятся далеко от текущих точек обучения и

критической области, имеют более высокую вероятность оказаться новыми обучающими точками. $U_A(x)$ уделяет больше внимания области, где точки являются неопределенными. Исходя из опыта, обычно подходит значение $p = 2$. Критерий останова $U_A(x)$ идентичен функции U :

$$\min U_A(x) \geq \gamma. \quad (24)$$

2.5 Полупараллельный метод активного обучения, основанный на кригинге

Основываясь на вышеупомянутом $U_A(x)$, Ли и др. (Li et al., 2023) предложили новый полупараллельный метод активного обучения (СПАК – semi-parallel active learning method based on Kriging), основанный на кригинге с целью увеличения точности оценки и сокращения вычислительного времени. В СПАК новые точки обучения добавляются полупараллельно для обновления суррогатной модели. Полупараллельность указывает на то, что добавленные новые точки обучения могут составлять одну точку или две точки в течение одного процесса обучения, что зависит от различных положений функций обучения. Таким образом, СПАК существенно отличается от традиционного параллельного обучения и последовательного метода обучения. Блок-схема СПАК показана на рис. 2, а процедура включает следующие шаги (Li et al., 2023) :

Шаг 1. *Инициализация.* Сгенерируйте совокупность точек выборки n_{MC} , заданных $S = \{x_i; i = 1, 2, \dots, n_{MC}\}$ на основе функции плотности вероятности в пространстве проектирования. Таким образом, в нем будут представлены кандидаты обучающихся точек процесса активного обучения. Совокупность n_{MC} будет изменена в большей степени, если будет выполнено условие обновления.

Шаг 2. *Определите исходный DoE.* Чтобы построить исходную суррогатную модель Кригинга, DoE содержит образцы n_{TR} , которые стохастически выбираются из n_{MC} или с помощью выборки латинского гиперкуба в сокращенной области $[\mu_x \pm 5\sigma_x]$. Затем вызывается функция работоспособности для вычисления откликов на этих выборках. Размер образцов в исходном DoE обычно невелик. Как правило, это число увеличивается с увеличением числа случайных величин.

Шаг 3. *Создайте или уточните модель Кригинга.* Модель Кригинга строится или уточняется на основе текущего DoE и откликов этих точек обучения. Здесь для этого рекомендуется использовать toolbox DACE из Matlab.

Шаг 4. *Прогнозирование с использованием модели Кригинга.* В результате из уравнений (11)-(18) находим $\hat{G}(x_i)$, стандартное отклонение $\sigma_{\hat{G}(x_i)}^2$ и вектор коэффициента корреляции $\mathbf{r}(x_i)$ для $i = 1, 2, \dots, n_{MC}$. Затем на основе уравнения (4) вычисляется вероятность отказа.

Шаг 5. *Определение новых обучающих точек* в полупараллельном режиме. На этом этапе две обучающие функции в уравнениях (21) и (22) вычисляются одновременно для всех точек выборки n_{MC} . Отбираются новые потенциальные точки обучения, где $U(x)$ и $U_A(x)$ достигают минимума. В

большинстве ситуаций функции обучения в первую очередь основаны на прогнозах $\hat{G}(x_i)$ и дисперсии $\sigma_{\hat{G}(x_i)}^2$ они являются одной и той же точкой с высокой вероятностью. Таким образом, это добавит только одну новую и точку к текущим обучающим точкам. Напротив, точка с низкой корреляцией $r(x_i)$ с текущими точками обучения, скорее всего, отличается от точки, основанной на функции U . Затем обе две точки будут добавлены к текущим параллельным обучающим точкам.

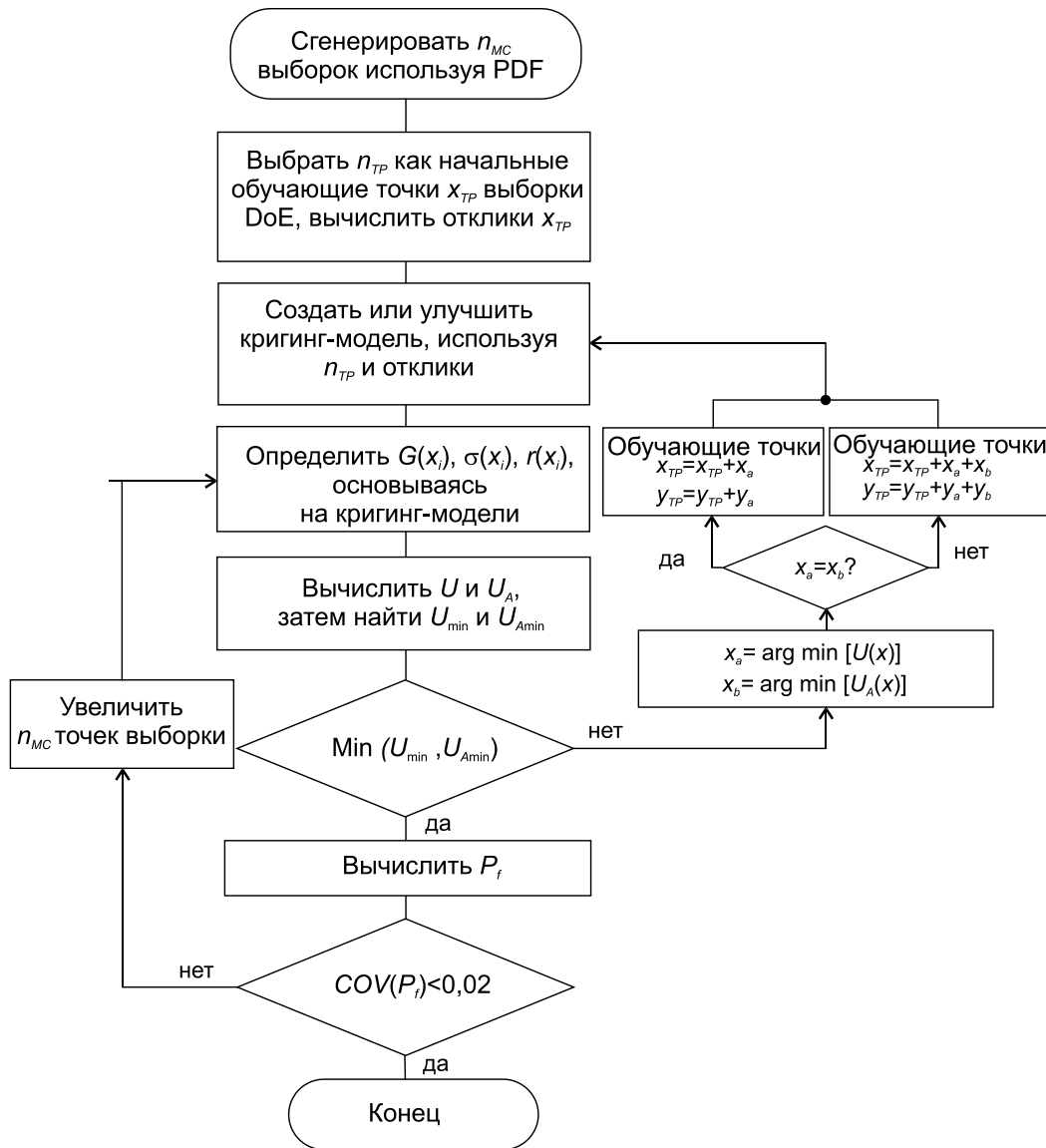


Рис. 2. Блок-схема SPAK метода (Li et al., 2023)

Шаг 6. *Критерий остановки процесса обучения.* Если наилучшие следующие точки определены с помощью функций обучения, значения соответствующих функций обучения сравниваются с критерием остановки

$$\min(U_{\min}, U_{A\min}) \geq \gamma.$$

Шаг 7. *Обновление DoE новыми точками.* Если критерий остановки на шаге 6 не удовлетворен, обучение продолжается, и новые точки оцениваются с помощью функции работоспособности. Процесс обучения возвращается к шагу 3, чтобы усовершенствовать новую суррогатную модель с обновленной DoE состоящей из n_{TP+1} или n_{TP+2} точек.

Шаг 8. *Вычисление $COV(P_f)$.* Если критерий остановки на шаге 6 достигнут, то обучение завершено и суррогатная модель Кригинга достаточно точна. Однако ещё предстоит выяснить, подходит ли n_{MC} по размеру для MCS. Если размер слишком мал, то вероятность отказа мала. Здесь допустимо иметь коэффициент вариации ниже 2%. Это оценивается из уравнения:

$$COV(\hat{P}_f) = \sqrt{\frac{1 - \hat{P}_f}{\hat{P}_f n_{MC}}} \leq 2\% .$$

Шаг 9. *Обновление выборки методом Монте-Карло.* Если $COV(P_f)$ слишком велико, то следует добавить выборку n_{MC} Монте-Карло, которая генерируется, как на шаге 1. Затем СПАК переходит на шаг 4 для прогнозирования добавленной новой популяции, и метод активного обучения продолжается до тех пор, пока снова не будет выполнен критерий остановки. Для повышения эффективности постоянно используются оценки предыдущей функции работоспособности.

Шаг 10. *Завершение СПАК.* Если $COV(P_f)$ ниже, чем целевая остановка СПАК, то последняя оценка вероятности отказа рассматривается как результат функции работоспособности.

Литература

Dellino G, Lino P, Meloni C, Rizzo A. (2009). Kriging metamodel management in the design optimization of a CNG injection system. *Math Comput Simul* 2009;79(8):2345–60.

Ditlevsen, Ove, and Henrik O. Madsen. 1996. *Structural Reliability Methods*. Vol. 178. Wiley New York.

Durakovic, B. (2017). Design of Experiments Application, Concepts, Examples: State of the Art. *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*. Vol 5, No 3, pp. 421–439.

Griffiths, D.V., and Fenton, G.A. (2001). “Bearing capacity of spatially random soil. The undrained clay Prandtl problem revisited.” *Géotechnique*, 51(4): 351-359.

Griffiths, D.V., Fenton, G.A., and Manoharan, N. (2002). “Bearing capacity of rough rigid strip footing on cohesive soil: Probabilistic study.” *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 128(9): 743-755.

Echard B, Gayton N, Lemaire M. (2011). AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation. *Structural Safety* 2011;33(2):145–54.

Farjraoui, N., Marelli, S., Sudret, B. (2016). On optimal experimental designs for Sparse Polynomial Chaos. Report RSUQ-2017-001, 34 p.

Jones DR, Schonlau M, Welch WJ. (1998). Efficient global optimization of expensive black-box functions. *J Global Optimiz* 1998;13(4):455–92.

Kaymaz I. (2005). Application of Kriging method to structural reliability problems. *Struct Safety*;27(2):133–51.

Kleijnen JPC. (2009). Kriging metamodeling in simulation: a review. *Eur J Oper Res* 2009;192(3):707–16.

Lebrun, R., Dutfoy, A. (2009). An innovating analysis of the Nataf transformation from the copula viewpoint. *Probabilistic Engineering Mechanics* 24, 312-320.

Lelièvre, Nicolas, Pierre Beaurepaire, Cécile Mattrand, and Nicolas Gayton. (2018). “AK-MCSi: A Kriging-Based Method to Deal with Small Failure Probabilities and Time-Consuming Models.” *Structural Safety* 73 (July): 1–11.

Lemaire, Maurice. (2013). *Structural Reliability*. John Wiley & Sons.

Li, C.C., and Der Kiureghian, A. (1993). “Optimal discretization of random fields.” *Journal of Engineering Mechanics*, 119(6): 1136-1154.

Li, Z.; Li, X.; Li, C.; Ge, J., Qiu, Y. (2023). A Semi-Parallel Active Learning Method Based on Kriging for Structural Reliability Analysis. *Appl. Sci.* 2023, 13, 1036. <https://doi.org/10.3390/app13021036>.

Lophaven SN, Nielsen HB, Sondergaard J. (2002a). DACE, a matlab Kriging toolbox, versión 2.0. Tech. Rep. IMM-TR-2002-12; Technical University of Denmark. <<http://www2.imm.dtu.dk/hbn/dace/>>.

Lophaven SN, Nielsen HB, Sondergaard J. (2002b). Aspects of the matlab toolbox DACE. Tech. Rep. IMM-REP-2002-13; Technical University of Denmark. <<http://www2.imm.dtu.dk/hbn/dace/>>.

Marrel A, Iooss B, Van Dorpe F, Volkova E. (2008). An efficient methodology for modeling complex computer codes with gaussian processes. *Comput Stat Data Anal*;52(10):4731–44.

Matheron G. (1973). The intrinsic random functions and their applications. *Adv Appl Probab* 1973;5(3):439–68.

Nataf, A. (1962). “Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données.” *CR Acad Sci*, 225: 42-3 (in French).

Rubinstein, R. Y., Dirk P. Kroese, D.P. (2016). *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons.

Schobi, R., Sudret, B. (2015). Application of conditional random fields and sparse polynomial chaos expansions in structural reliability analysis. *Geotechnical safety and risk* V 445.

Tang, k., Wang, J., Li, L. (2020). A Prediction Method Based on Monte Carlo Simulations for Finite Element Analysis of SoilMediumconsidering Spatial Variability in Soil Parameters. *Advances in Materials Science and Engineering Volume* 2020.

Thajeel, J., Al-Bittar, T., Issa, N., Soubra, A.H. (2016). Bearing capacity of the strip footings on spatially random soils using kriging and Monte Carlo simulation.

ECCOMAS Congress 2016 VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, G. Stefanou, V. Plevris (eds.) Crete Island, Greece, 5–10 June 2016.

Vorechovsky, M. (2008). “Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods.” *Structural Safety*, 30, 337-363.

Wang, Z., Shafieezadeh, A. (2019). A Parallel Learning Strategy for Adaptive Kriging-based Reliability Analysis Methods. 13th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, ICASP13 Seoul, South Korea, May 26-30.

Wang, Y., Yang, Wang, P., Brandenberg, S.J. (2022). An algorithm for generating spatially correlated random fields using Cholesky decomposition and ordinary kriging. *Computers and Geotechnics* 147(1).

Yu, Z., Sun, Z., Wang, J., Chai, X. (2018). A new Kriging-based DoE strategy and its application to structural reliability analysis. *Advances in Mechanical Engineering* 2018, Vol. 10(3) 1–13.