

Метод случайных конечных элементов

Метод случайных конечных элементов (random FEM - RFEM)) был разработан в 1990-х годах. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы присвоить каждому конечному элементу или узлу различные значения свойств грунта. Введенные значения должны удовлетворять требованиям случайных полей (среднее и дисперсия), а затем проводится анализ методом конечных элементов на основе этих смоделированных случайных свойств грунта. Расчетная модель подвергается численному моделированию, с каждым новым случайным полем, тем самым создавая разные реализации. Благодаря многочисленным расчетам можно легко оценить статистические показатели. Следовательно, RFEM включает в себя комбинацию метода конечных элементов и методологию случайного поля с моделированием Монте-Карло. Этот метод может правильно учитывать пространственную изменчивость и корреляцию и, широко использовался в геотехнической практике.

Процедура RFEM включает следующие шаги:

1. Выбирается функция работоспособности $g(\mathbf{x})$ решаемой геотехнической задачи с целью определения вероятности отказа P_f :

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} I_g(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1)$$

где \mathbf{x} - вектор случайных величин; $g(\mathbf{x})$ - функция работоспособности или предельного состояния; $\rho(\mathbf{x})$ - функция плотности вероятности из \mathbf{x} и $I_g(\mathbf{x})$ - функция индикатора отказа. $I_g(\mathbf{x}) = 1$ когда $g(\mathbf{x}) \leq 0$, и $I_g(\mathbf{x}) = 0$ когда $g(\mathbf{x}) > 0$.

Пример 1. Функция работоспособности, используемая для расчета вероятности P_f превышения предельной несущей способности определяется следующим образом:

$$g = p_u/p - 1, \quad (2)$$

где p_u – предельная нагрузка на основание; p – заданная нагрузка.

Для заданного набора реализаций случайного поля в МКЭ программе используется моделирование методом Монте-Карло (MCS) для получения ряда стохастических значений функции работоспособности.

Пример 2. Анализ повторяется множество раз с использованием моделирования методом Монте-Карло. Каждая реализация процесса Монте-Карло включает в себя одно и то же базовое среднее значение, стандартное отклонение и длину пространственной корреляции свойств грунта, однако свойства пространственно изменяются от одной реализации к другой. Вероятность разрушения (P_f) находится путем деления количества реализация с коэффициентом безопасности $FS < 1$ на общее количество реализаций.

2. Выбирается конечно-элементной модель (МКЭ), которая даст детерминированное решение рассматриваемой геотехнической задачи;

3. Выполняется идентификация всех независимых переменных и выбор входных параметров, изменчивость которых будет моделироваться с помощью функции плотности вероятности. Обратите внимание, что, основываясь на отображении координат центра конечного элемента взаимосвязь между конечным элементом и элементом случайного поля, в виде характеристик грунта должны быть правильно присвоены соответствующему МКЭ элементу при вводе реализации параметров случайного поля в МКЭ модель.

4. Определение статистических показателей значений характеристик грунтов из нормативной выборки: среднее значение, стандартное отклонение, функция плотности вероятности, масштаб флуктуации.

5. Используя **генератор случайного поля** создается набор случайных варьируемых свойств грунта со средними значениями характеристик грунтов определенные на предыдущем шаге.

6. Выполнить решение задачи методом конечных элементов, основываясь на случайных значениях характеристик грунтов.

7. Определить вероятность отказа:

$$P_f = N/n, \quad (3)$$

где N - количество значений функции работоспособности $g \leq 0$; n – общее количество MCS реализаций. Требуемое минимальное количество MCS реализаций определяется зависимостью $n > 100/P_f$ для оценки вероятности отказа при достижении $COV(P_f)$ менее 1-5%.

8. Определить коэффициент вариации $COV(P_f)$ из уравнения:

$$COV(P_f) = \sqrt{\frac{1-P_f}{P_f n}}. \quad (4)$$

9. Проверить, достигает ли $COV(P_f)$ требуемой точности решения. Если оно меньше целевого значения (например, меньше 0,1), остановите процесс решения; в противном случае возвратитесь к шагу 4, увеличьте выборку и повторите решение до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность решения.

10. Выведите P_f в результате анализа, количественно оцените значение коэффициента безопасности.